Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 137–149*

John Nash y la teoría de juegos

Sergio Monsalve
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Al profesor y académico Don Jairo Charris Castañeda
In memoriam

Abstract. In the last twenty years, game theory has become the dominant model in economic theory and has made significant contributions to political science, biology, and international security studies. The central role of game theory in economic theory was recognized by the awarding of the Nobel Price in Economic Science in 1994 to John C. Harsanyi, John F. Nash, & Reinhard Selten. The fundamental works in game theory of John F. Nash together with a brief exposition of them are included in this article.

Key words and phrases. John Nash, History of Mathematics, Game Theory

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 01A70. Secondary 91A12.

Resumen. En los últimos veinte años, la teoría de juegos se ha convertido en el modelo dominante en la teoría económica y ha contribuido significativamente a la ciencia política, a la biología y a estudios de seguridad nacional. El papel central de la teoría de juegos en teoría económica fue reconocido con el premio Nobel en Economía otorgado a John C. Harsanyi, John F. Nash & Reinhard Selten en 1994. Se presentan los aportes de John Nash a la teoría de juegos conjuntamente con una exposición elemental de ellos.

1. Introduction

La Real Academia Sueca para las Ciencias le otorgó el premio Nobel en Ciencias Económiacs del año 1994 a los economistas John C. Harsanyi, Reinhard Selten y al matemático John F. Nash, debido a su "análisis pionero de equilibrios en la teoría de juegos no cooperativos". La Academia justifica este premio en economía a tres de los "grandes" en teoría de juegos con el argumento de que esta ha probado ser muy útil en el análisis económico. 60 años después de la publicación de la obra pionera de John von Neumann y Oskar Morgenstern (*Theory of Games and Economic Behavior* (1944)), la teoría de juegos había recibido el merecido reconocimiento como herramienta fundamental del análisis económico moderno y el aporte de John Nash fue fundamental.

2. ¿Qué es la teoría de juegos?

La teoría de juegos (o teoría de las decisiones interactivas es el estudio del comportamiento estratégico cuando dos o más individuos interactúan y cada decisión individual resulta de lo que él (o ella) espera que los otros hagan. Es decir, qué debemos esperar que suceda a partir de las interacciones entre individuos.

3. ¿Con qué estructuras estudiamos la teoría de juegos?

Existen, fundamentalmente, dos formas distintas de aproximarnos al análisis de una situación de interacciones entre individuos

I) La primera (que es quizás la dominante dentro del ambiente de los economistas) es la *teoría de juegos no cooperativos*, en la que, básicamente, tenemos un conjunto de jugadores, cada uno con estrategias a su disposición, y unas asignaciones de pagos que reciben por llevar a cabo tales estrategias. La característica "no cooperativa" está en la manera de cómo eligen y en lo que saben de los otros jugadores cuando eligen: en general, se supone que los individuos toman sus decisiones *independientemente unos de otros* aunque conociendo sus oponentes y las posibles estrategias que estos tienen a su disposición. Es decir, son individuos egoístas pero que tratan de predecir lo que los otros agentes harán para obrar entonces en conveniencia propia. En esta estructura de análisis los agentes no alcanzan ningún nivel de cooperación.

Nada mejor que un ejemplo bien ilustrativo del *modus operandi* de este tipo de modelos. Y quizás el más elocuente de los juegos no-cooperativos elementales es el *dilema del prisionero.* La historia de este juego va como sigue: dos individuos son detenidos debido a que cometieron cierto delito. Ambos son separados en celdas diferentes y son interrogados individualmente. Ambos tienen dos alternativas: cooperar uno con otro (no-confesar) o no cooperar (confesar el delito). Ellos saben que si ninguno confiesa, cada uno irá a prisión por dos años. Pero si uno de los dos confiesa y el otro no, entonces al que confiesa lo dejarán libre y al que no confiesa lo condenarán a 10 años. Si ambos confiesan, los dos irán a prisión por 6 años. La situación se resume en la siguiente *bimatriz* (es decir, una matriz cuyos elementos son parejas números):

		Prisionero 1	
		C	NC
Prisionero 2	C	$(-2,-2)$	$(-10,0)$
	NC	$(0,-10)$	$(-6,-6)$

C = cooperar (no confesar), NC = cooperar(confesar)

La pregunta natural es: ¿qué harán los detenidos? ¿cooperarán entre sí (no confesarán) o se traicionarán el uno al otro (confesarán)? Alguien desprevenido que esté observando este juego podría pensar que los dos jugadores cooperarían (no confesarán) puesto que en ese caso *ambos* obtendrían el menor castigo posible. Sin embargo, la estructura *no cooperativa* del problema hace que este arreglo no sea creíble: si se pactara la no-confesión por parte de los dos, ambos tendrían incentivos particulares para romperlo, pues dejando al otro en cumplimiento del pacto de no confesar y éste confesando, el que rompe el pacto obtiene la libertad mientras al otro lo condenarán a 10 años. Y, similarmente, estudiando las otras tres posibilidades del juego (es decir, (C, NC), (NC, NC), (NC, C)) observamos que el único *acuerdo creíble* (que significa que ninguno de los dos querría romper el pacto unilateralmente porque perdería) es (NC, NC). *En definitiva, la predicción de lo que ocurrirá en el juego es que ambos confesarán y permanecerán en la carcel 6 años.*

La conclusión en situaciones similares a ésta (que son comunes en la vida diaria) es que la competencia egoísta puede conducir a estados que son inferiores (en términos de beneficio personal y social) a los estados cooperativos, pero que estos últimos no podrán implementarse a menos que existan *reforzmientos externos* (contratos firmados por ley, con verificación, etc.) que obliguen a las partes a cumplir con el acuerdo de cooperación.

Esta es la idea esencial de Nash al definir el concepto de *equilibrio de Nash* en su tesis doctoral en Matemáticas en la Universidad de Princeton (*Non-cooperative Games* (1950)): un *equilibrio de Nash* de un juego es un acuerdo que ninguna de las partes puede romper a discreción sin perder. Es decir, si alguien quiere romper el pacto y lo hace unilateralmente, se arriesga a ganar por debajo de lo que hubiese ganado dentro del pacto. Sin embargo, como queda claro en el juego del dilema del prisionero, esto puede no ser lo mejor *socialmente* para los jugadores.

Uno de los resultados que hacen del equilibrio de Nash un punto de referencia para casi todo análisis en el que las interacciones entre individuos estén involucradas es que

> *todo juego finito (es decir, finitos jugadores y finitas estrategias de cada jugador) tiene al menos un equilibrio de Nash, aunque involucre ciertas probabilidades objetivas de juego de las estrategias por parte de los jugadores.*

Este resultado es del mismo Nash. En un artículo previo a su tesis de doctorado, y publicado también en 1950 (*Equilibrium points in $n-$person games*) él prueba, utilizando un teorema de punto fijo (el conocido *teorema de punto fijo de Brouwer*), que un equilibrio de Nash es un "punto fijo": las expectativas de los gentes con respecto a lo que los demás harán, coinciden, todas, en el equilibrio de Nash.

II) La segunda estructura fundamental para el estudio de la teoría de juegos para desde allí predecir resultados de la interacción, es la *teoría de juegos cooperativos* o *coalicionales*. Aquí todavía tenemos los mismos agentes egoístas, pero ahora se asume que, si pueden obtener algún beneficio de la cooperación, no dudarán en formar coaliciones que son creíbles. Por supuesto, bajo una estructura como la de juegos no cooperativos, un acuerdo de cooperación puede no ser la "solución", de manera que los agentes deben tener una estructura de información diferente si queremos un comportamiento acorde.

En una estructura cooperativa tenemos el mismo conjunto de jugadores egoístas, solo que ahora tienen información sobre cierta valoración *a priori* de las coaliciones. Es decir, se reconoce cuáles coaliciones son las más "valiosas" y cuáles las "menos valiosas". Para concretar ideas, vamos a presentar un modelo que muestra bien el poder predictivo que puede tener este tipo de estructura y las soluciones asociadas. El modelo del *pequeño mercado* muestra una estructura de mercado en la que hay un vendedor (jugador 1) de cierto bien que no podemos dividir en partes (piénsese, por ejemplo, en un automóvil como bien de uso), y dos compradores (jugador 2 y jugador 3) que desean comprar ese bien. Las valoraciones que *a priori* se le asignan a las coaliciones serán, en este caso, un reflejo del éxito o fracaso de la negociación entre el vendedor y el comprador dependiendo de cómo se emparejen, y no una predicción sobre quién de los dos obtendrá el bien (este problema tiene otra valoración). En este caso, asignamos la valoración a todas las posibles coaliciones de la siguiente forma:

$$V(\{1,2,3\}) = V(\{1,2\}) = V(\{1,3\}) = 1$$

("si hay vendedor y comprador, el negocio se lleva a cabo")

$$V(\{1\}) = V(\{2\}) = V(\{2,3\}) = 0$$

("si solo hay compradores o vendedor, no se realiza el negocio")

Existen varias "soluciones" a ese tipo de juegos en forma cooperativa. Por supuesto, una "solución" debe significar una repartición de la riqueza o valoración total de todo el grupo de jugadores como gran coalición, de tal manera que a cada jugador le corresponda su "aporte" a ella. Cómo determinar el nivel de este aporte es algo que analizamos con las dos más importantes soluciones a juegos cooperativos: *el núcleo y el valor de Shapley.*

a) El núcleo del juego cooperativo (Gillies (1953))

La idea de repartición detrás de la solución de núcleo es que si esta le asigna x_1 al vendedor, x_2 al comprador-jugador 2, y x_3 al comprador-jugador 3, entonces debemos, por lo menos, tener que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (eficiencia) \tag{i}$$

(los tres agentes se reparten el "poder" del mercado que está, *a priori*, en la unión de los tres).

$$\begin{aligned} V(\{1,2\}) &\leq x_1 + x_2, \\ V(\{1,3\}) &\leq x_1 + x_3, \\ V(\{2,3\}) &\leq x_2 + x_3, \\ V(\{1\}) &\leq x_1, \\ V(\{2\}) &\leq x_2, \\ V(\{3\}) &\leq x_3 \end{aligned} \tag{ii}$$

("lo que los agentes reciben a través de la asignación de núcleo es mejor que lo que recibirían antes de la asignación *a priori* V, y esto sucede en cualquier coalición que formen").

Obsérvese que la asignación de núcleo es un acuerdo muy básico. Es una "invitación" a formar coaliciones: si usted forma alguna coalición ganará más de lo que gana en cualquier coalición del status quo determinado por la asignación *a priori* V.

Un poco de aritmética nos muestra que la única asignación de núcleo en nuestro *pequeño mercado* es $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$. En otras palabras, el núcleo está pronosticando que la importancia total del mercado la tiene el vendedor y que los compradores no tienen niguna. Pobre predicción: no existe casi ningún mercado en el que los compradores no tengan ninguna importancia estratégica.

b) El valor de Shapley del juego cooperativo (Shapley (1953)

Otra forma de distribución con consideraciones más sutíles que las de núcleo, es el valor de Shapley. Podría decirse que el valor de Shapley es a los juegos cooperativos, lo que el equilibrio de Nash es a los juegos no cooperativos.

Como ya habíamos descrito con el ejemplo anterior, un juego cooperativo consiste en un conjunto de jugadores N $(\neq N = n)$ y una asignación monetaria $V(S)$ para cada subcoalición $S \subseteq N$. El problema que se intenta resolver es: ¿Cómo distribuir la riqueza total $V(N)$ entre todos los participantes? El valor de Shapley busca solucionarlo imponiendo ciertas condiciones a la distribución:

Si x_i, $i \in N$, es la asignación que recibiría en la distribución de Shapley el jugador i, entonces

a) (Eficiencia)

$$x_1 + x_2 + ...x_n = V(N)$$

b) (Jugador "dummy" o fantasma) Si para algún $i \in N$, $V(S \cup \{I\}) = V(S)$ para toda coalición S, entonces $x_i = 0$

c) (Simetría) Si las valoraciones de las coaliciones no cambian cuando se reemplaza un jugador por cualquier otro, entonces, todos reciben lo mismo. Es decir, $x_1 = ... = x_n$.

d) (Aditividad) Si V y W son dos valoraciones distintas sobre el mismo conjunto N de jugadores, entonces la asignación de cualquier jugador para la valoración V y para la valoración W es aditiva. Es decir, para todo $i \in N$, $x_i(V + W) = x_i(V) + x_i(W)$

Solo el valor de Shapley satisface estas cuatro condicions. Y más aún, existe una fórmula explícita sobre cómo calcularlo, basada en las "contribuciones marginales" (es decir, una medida de cuánto un jugador le aporta a las coaliciones en donde está):

$$x_i = \frac{\sum_{r \in \Re} (\Delta_i(S_i(r)))}{n!} \qquad (*)$$

donde $\Re$ es el conjunto de los $n!$ órdenes de N, $S_i(r)$ = conjunto de jugadores que preceden a i en el orden r, $\Delta_i(S) = V(S \cup \{i\}) \setminus V(S) =$ contribución marginal del agente i a la coalición S.

Como un ejemplo de la "mejor" distribución total de la riqueza del juego entre los participantes que el valor de Shapley realiza, es fácil calcular (con la fórmula (*) de arriba) que en el juego del Pequeño Mercado que analizábamos antes, el valor de Shapley es

$$x_1 = 2/3, \qquad x_2 = 1/6, \qquad x_3 = 1/6.$$

A diferencia del núcleo, cuya asignación es $(1, 0, 0)$, el valor de Shapley **sí** está asignándole importancia a los compradores, aunque reconoce un poder mayor al vendedor.

IIa) Una muy importante categoría en el estudio de la teoría de juegos clásica es, realmente, una subdivisión de la teoría de juegos cooperativos: los *modelos de negociación.* En estos juegos, dos o más jugadores buscan ganar a través de la cooperación, pero deben negociar el procedimiento y la forma en que se dividirán las ganancias de esta cooperación. Un modelo de negociación específica: cómo y cuándo se alcanzan los acuerdos y cómo se dividirán las ganancias, dependiendo de las reglas de negociación y de las características de los negociadores.

John Nash realizó contribuciones fundacionales a la teoría de juegos de negociación. En su artículo de 1950, *The bargaining problem*, se aparta radicalmente de la teoría económica ortodoxa que consideraba indeterminados los problemas de negociación. En contraste, Nash asume que la negociación entre agentes racionales conduce a un único reultado, y lo determina imponiéndole al modelo ciertas "propiedades deseables". La formulación de Nash del problema de negociación y su solución (la solución de negociación de Nash) constituyen el fundamento de *la teoría moderna de la negociación.*

Para aclarar un tanto lo dicho arriba con una versión muy elemental del problema de negociación de Nash, supongamos que tenemos dos jugadores egoístas que buscan dividirse una cantidad de dinero M y que **no** están de acuerdo en que los dos no obtengan nada de la negociación, pero que si no llegan aun acuerdo, entonces sí les corresponderá "irse con las manos vacías". John Nash mostró que bajo ciertas condiciones plausibles, los dos jugadores acordarían la repartición (x_1, x_2) que maximiza, en este caso, el producto de las dos. Es decir, resuelven

$$\text{Máx } x_1 x_2, \quad \text{sujeto a la condición} \quad x_1 + x_2 = M.$$

La solución a esto es, como se ve fácilmente, $(x_1)^* = (x_2)^* = \frac{1}{2}M$. Esta es la *solución de negociación de Nash* a este simple problema: distribución equitativa de la cantidad de dinero disponible. Esta solución se ilustra en el diagrama de abajo. Por supuesto, problemas de negociación más complicados dan orígen a soluciones de Nash menos obvias.

grafico!!!!

Aquellas "propiedades deseables" mencionadas arriba, que satisface la solución de negociación de Nash son las siguientes:

a) Eficiencia: las soluciones de negociación de Nash agotan todas las oportunidades de mejorar las ganancias de ambos jugadores.
b) Simetría: si el cambio de un jugador por otro no cambia el problema de negociación, en la solución ellos deben obtener lo mismo.
c) Invarianza: la solución no puede depender de las unidades arbitrarias en las que se midan los beneficios de la negociación.
d) Independencia de alternativas irrelevantes: es la hipótesis más sutil. Dice que el resultado de una negociación no puede depender de alternativas de negociación que los negociadores no escogen aunque pudieran hacerlo.

Estas cuatro hipótesis conducen al conoocido *teorema de negociación de Nash*:

> *La solución de negociación de Nash es la única solución que satisface las propiedades a), b), c), d) en un modelo de negociación.*

3. El programa Nash: ¿Es mejor cooperación que competencia?

Nash aseguraba que la teoría de juegos cooperativa y no cooperativa eran complementarias, que cada una ayudaba a justificar y clarificar la otra. Si una solución cooperativa podía ser obtenida a partir de un conjunto convincente de hipótesis, esto indicaba que también podía ser apropiada en una variedad de situaciones más amplia que las encontradas en un modelo no cooperativo simple. Y de otro lado, si reformulamos juegos cooperativos como no cooperativos y buscamos los equilibrios de Nash de estos últimos, la discusión abstracta sobre lo razonables que puedan ser los principios o los resultados se reemplazan por una discusión más mundana acerca de lo apropiadas que son las reglas del juego.

El programa Nash buscaba la posibilidad de la unificación teórica, y algunos logros ya se tienen en este sentido. Uno de ellos es el famoso teorema de AUMANN (1975) que afirma, en términos elementales, y a la vez un tanto vagos, lo siguiente:

> *En un grupo conformado por* **muchos** *agentes que tratan de disputarse cierta cantidad de dinero, las distribuciones de equilibrio de Nash, de núcleo, de valor de Shapley y de negociación de Nash coinciden.*

Aquí, la palabra "muchos" intenta capturar la idea de que cada jugador, por sí mismo, tiene un poder estratégico prácticamente nulo. Solo tienen poder, para la asignación, grupos verdaderamente "grandes", no individuos aislados. Una implicación directa de este teorema es que cuando las interacciones individuales tienden a anularse, ¡¡la competencia y la cooperación conducen a los *mismos* resultados!!

Otro modelo básico muy importante en la dirección del programa Nash es el de RUBINSTEIN (1982) que muestra que cualquier resultado de negociación Nash entre pocos agentes, puede aproximarse mediante equilibrios de Nash de juegos no cooperativos secuenciales. Pero, por encima de esto, el gran impulso del programa Nash se recibió en 1994 en el seminario Nobel sobre el trabajo de JOHN NASH en la Universidad de Princeton (publicado en *Les Prix Nobel 1994*). Después de estos, se han obtenido resultados que involucran otros valores diferentes al de SHAPLEY en estructuras de juegos más sofisticadas que muestran que la afirmación de SHAPLEY en el sentido de que ambas teorías (cooperativa y no cooperativa) son, no solo complemento una de otra, sino que realmente son una sola teoría vista con dos lentes diferentes, estaba en el camino correcto (véase HART & MAS COLELL (1996), HART & MONSALVE (2001)).

5. Otras contribuciones de Nash a la teoría de juegos

Se reconocen muy poco las contribuciones de John Nash a la primera literatura en economía experimental (véase Roth (1993)). Entre otras, Nash hace algunos comentarios importantes respecto a la cooperación observada cuando repetimos infinitamente el dilema del prisionero. Además, el trabajo pionero de Nash, conjuntamente con Kalish, Milnor y Nering sobre experimentos en juegos cooperativos (Kalish et al. (1954)) fue un importante estímulo para Reinhard Selten en sus experimentos (Selten (1993)) que han conducido al florecimiento de la escuela alemana en economía experimental.

6. Final

El parágrafo final de los periódicos anunciando el premio Nobel en Economía de 1994 dice: "a través de sus contribuciones al análisis de equilibrios en teoría de juegos no cooperativos, los tres laureados constituyen una combinación natural: Nash dio los fundamentos para el análisis, Selten los desarrolló con respecto a la dinámica, y Harsanyi con respecto a la información incompleta". Esta es la unidad "natural" de este premio. Sin embargo, nótese que la teoría de juegos cooperativos fue completamente ignorada e, indirectamente, también los aportes de John Nash a esta teoría, incluyendo los resultados del Programa Nash.

El razonamiento de la teoría de juegos es ahora el fundamento de importantes áreas de la teoría económica, y está rápidamente entrando en disciplinas aparentemente disímiles como finanzas, ciencia política, sociología, derecho y biología. Las contribuciones de John Nash (junto con Harsanyi, Selten, Aumann & Shapley) constituyen importantes piedras angulares en el desarrollo de la teoría de juegos y en el establecimiento de una metodología común para analizar la interacción estratégica dentro de todas las ciencias sociales, e incluso (este es el reto) en otras ciencias.

Referencias

[1] Aumann, R. J. (1975) *Values of markets with a continuum of traders*, Econometrica **43**:611–646

[2] Aumann, R. J. (1977) *Game Theory*. In *The New Palgrave: A Dictionary of Economics* Vol. 2 ed J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, 460–482. London: Macmillan.

[3] Aumann, R. J. (1988) *On the state of the art in game theory: and interviewwith Robert Aumann*, Games and Economic Behavior **24**:181–210.

[4] Gillies, D. B. (1953) *Some theorems on $n-$person games*. Ph. D. Dissertation, Department of Mathematics, Princeton University.

[5] Hart, S. & Mas Colell, A. (1996) *Bargaining and Value*, Econometrica **64**: 357–380.

[6] Hart, S. & Monsalve, S. (2001) *The Asymptotic approach of the Maschler-Owen values* Journal of Game Theory (forthcoming).

[7] Kalish, G. K., Milnor, J. W., Nash, J. F., Nering, E. D. (1954) *Some experimental n person games*, Capítulo 21: 301–327 En: Thrall R. M., Coombs, C. H., Davids, R. L. (eds) *Decision Processes.* Wiley, New York.

[8] Mayberry, J. P., Nash, J. F. y Shubik, M. (1953) *A comparison of treatments of a duopoly situation*, Econometrica **21**:141–155.

[9] Monsalve, S. (1999) *Introducción a los conceptos de equilibrio en economía.* Editorial Unibiblos, Santafé de Bogotá.

[10] Monsalve, S. (2002) *Teoría de Juegos: ¿Hacia dónde vamos? (60 años después de von Neumann y Morgenstern)* Revista de Economía, Institucional No. 7 Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Próxima Publicación).

[11] Myerson, R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[12] Nash, J. F. (1950) *Equilibrium points in n person games*, Procedings from the National Academy of Sciences, USA **36**:48–49.

[13] Nash, J. F. (1950) *The Bargaining Problem*, Econometrica **18**:155–162.

[14] Nash, J. F. (1950) *Non cooperative Games*, Ph. D. Dissertation Princeton University.

[15] Nash, J. F. (1953) *Two person cooperative games*, Econometrica **21**:128–140.

[16] Roth, A. (1993) *The Early history of experimental economics*, Journal of History of Economic Thought **15**: 184–209.

[17] Rubinstein, A. (1982) *Perfect equilibrium in a bargaining model*, Econometrica **50**:97–109

[18] Selten, R. (1993) *In search of a a better understanding of economic behavior*. En : Heertje A. (ed.) The Makers of modern economics I:115–139. Harvester Wheatsheaf Hertfordshire.

[19] Shapley, L. S. (1953) *A value for n-person games.* En: *Contributions to the Theory of Games*, vol 2, H. W. Kuhn y A. W. Tucker, eds.
[20] Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

(Recibido en junio de 2002; la versión revisada agosto de 2003)

Sergio Monsalve
e-mail: email: monsalvesergio@yahoo.com
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia